烟台理工学院
Yantai Institute of Technology
（原烟台大学文经学院）
(Wenjing College Yantai University)

机器人学

人工智能学院　杨智勇
二零二一年八月二十日

第九章 机械臂的线性控制

- 5.1 时变位置和姿态的符号表示
- 5.2 刚体的线速度和角速度
- 5.3 机器人连杆的运动
- 5.4 雅可比矩阵
- 5.5 机械臂中的静力

引言

线性控制仅适用于能够用线性微分方程进行数学建模的系统.

$$a_0\frac{d^n}{dt^n}c(t)+\cdots+a_{n-1}\frac{d}{dt}c(t)+a_nc(t)=b_0\frac{d^m}{dt^m}r(t)+\cdots+b_{m-1}\frac{d}{dt}r(t)+b_mr(t)\ \pi$$

对于机械臂，这种方法实质上是一种近似的方法，但是，这种近似通常是可行的，而且是当前工程实际中最常用的方法.

反馈与闭环控制

1. 开环控制

（1）由轨迹生成器给定关节角、关节角速度、关节角加速度。

（2）用指定模型计算所需要的扭矩:

$$\tau = M(\Theta_d)\ddot{\Theta}_d + V(\Theta_d,\dot{\Theta}_d) + G(\Theta_d)$$

如果模型是完备和精确的，且没有噪声或者其它干扰存在，上式即可实现期望轨迹.

烟台理工学院
Yantai Institute of Technology
（原烟台大学文经学院）

反馈与闭环控制

然而在实际情况下，由于动力学模型的不理想以及不可避免的干扰使得这个方案并不实用。

这种控制技术称为开环控制方式，因为没有利用关节传感器的反馈。

反馈与闭环控制

2. 闭环系统

建立高性能的控制系统的唯一方法就是利用关节传感器的反馈。

伺服误差:

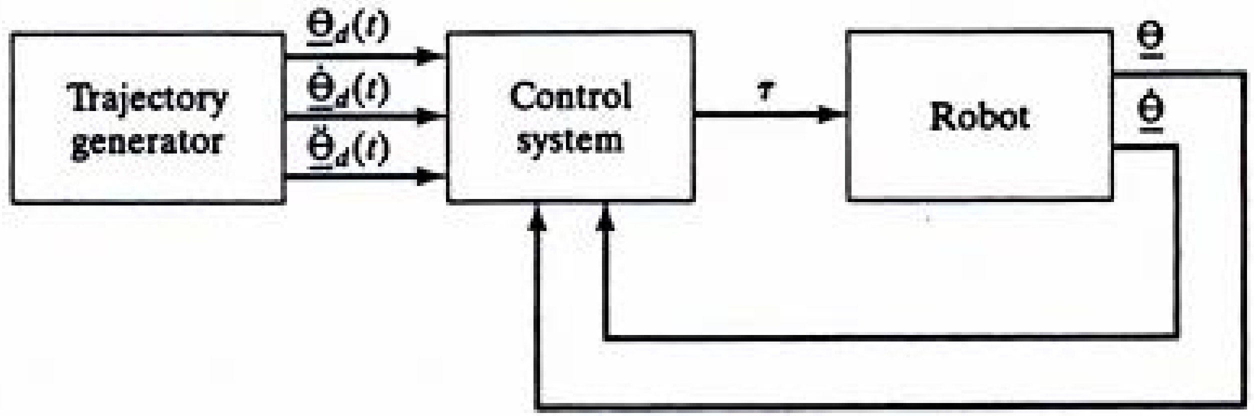
$$E = \Theta_d - \Theta \quad , \quad \dot{E} = \dot{\Theta}_d - \dot{\Theta}$$

这样，控制系统就能够根据伺服误差函数计算驱动器需要的力矩。这个基本思想是通过计算驱动器的扭矩来减少伺服误差。

反馈与闭环控制

利用反馈的控制系统称为闭环系统。 一个好的控制系统所应该具备的功能:

- 这个系统应该是一个稳定的系统.
- 保证闭环系统的性能满足要求.



二阶线性系统

1. 二阶线性系统

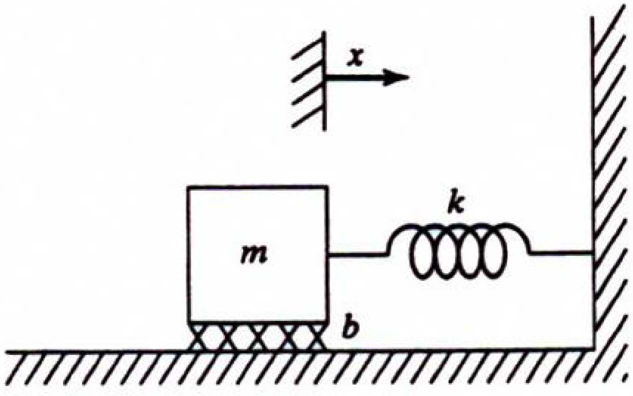
由质量块的受力图得到运动方程:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$

特征方程: $$ms^2 + bs + k = 0$$

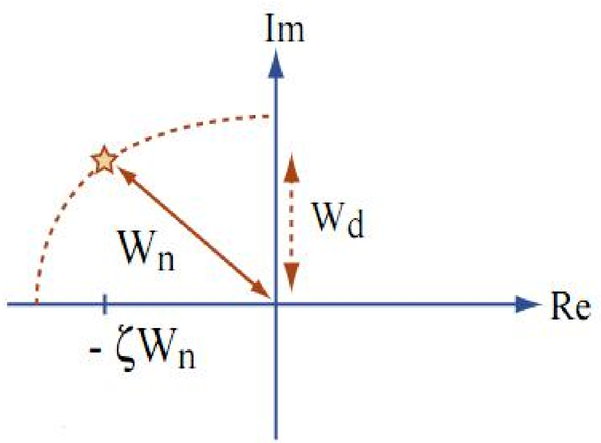
方程的根:

$$s_{1,2} = -\frac{b}{2m} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4mk}}{2m}$$



二阶线性系统

一种描述二阶振动系统的两个参数是 **阻尼比 （ damping ratio ）** and **固有频率（natural frequency）**：



$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

$$\sigma = -\xi w_n$$ 衰减系数

$$w_d = w_n\sqrt{1-\xi^2}$$ 阻尼振荡频率

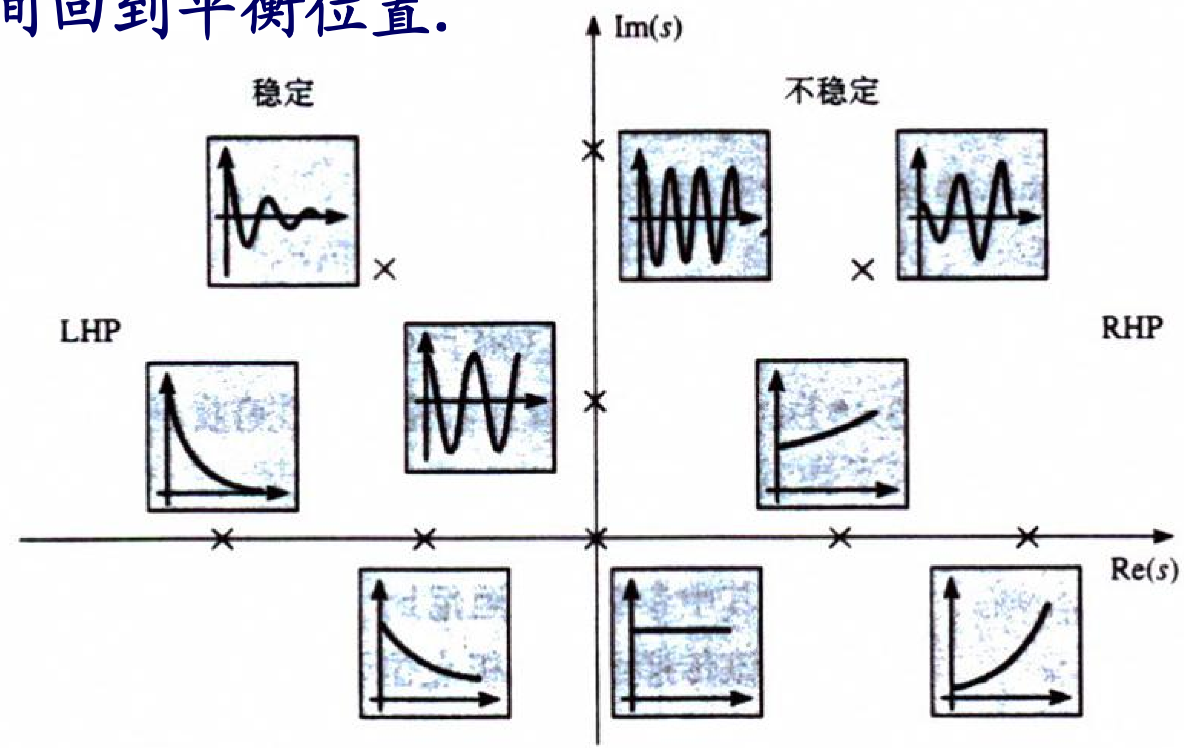
对于有阻尼的质量-弹簧系统，阻尼比和固有频率分别为:

$$\xi = \frac{b}{2\sqrt{km}} \quad , \quad \omega_n = \sqrt{k/m}$$

当无阻尼时 ($b = 0$) 阻尼比为0; 对于临界阻尼 ($b^2 = 4km$) 阻尼比是 1 .

二阶线性系统

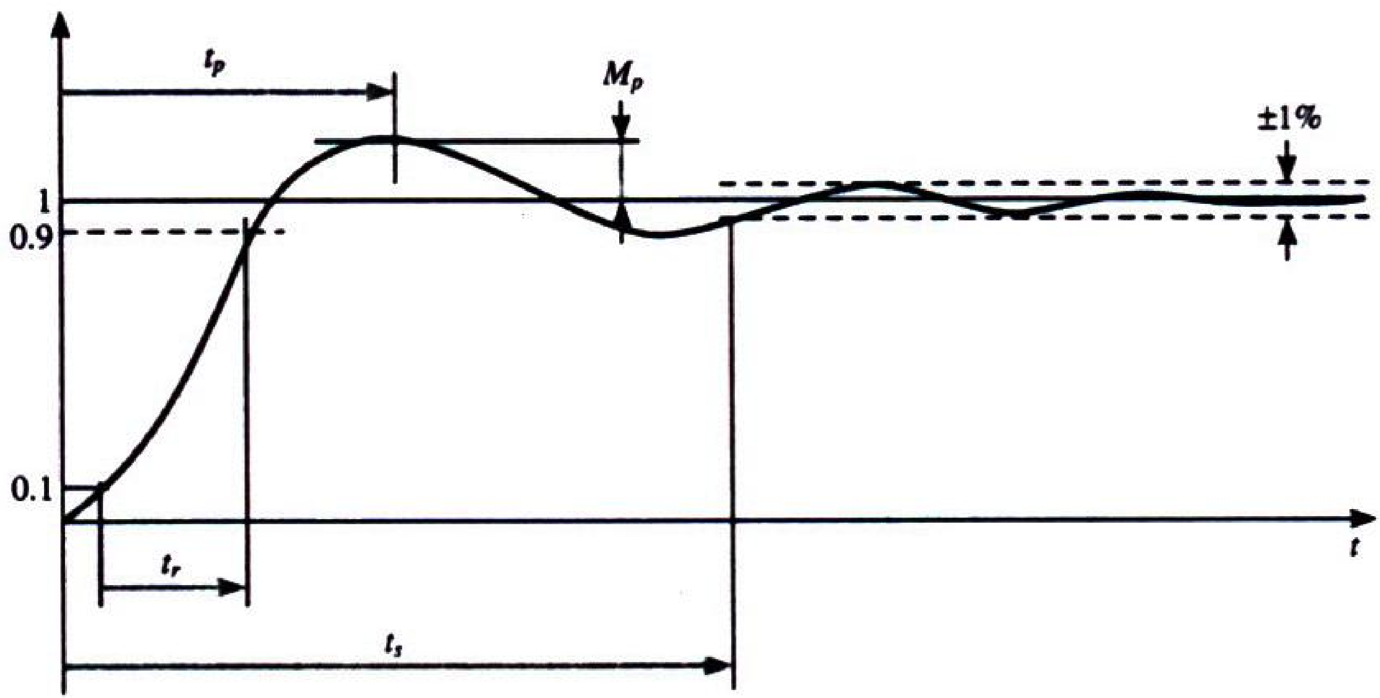
- 过阻尼（两个不等实根）：主要受摩擦影响，缓慢回到平衡位置.
- 欠阻尼（复根）：弹性力影响，出现振荡.
- 临界阻尼（相等实根）：此时摩擦力与弹性力平衡，系统以最短时间回到平衡位置.



二阶线性系统

时域特征指标

- 上升时间　　调节时间
- 稳态误差　　超调量



二阶线性系统的控制

2. 二阶系统的控制

设计一个控制器使得系统具有我们期望的特性。

设计目标:

- 稳定: stabilize the syatem.
- 位置校正: regulate the system about some design point.
- 轨迹跟踪: follow a given class of command signals.
- 抗干扰: reduce response to disturbances.

二阶线性系统的控制

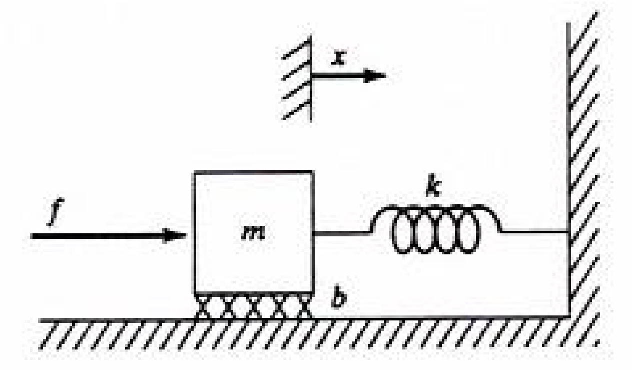
位置调节系统：这种系统只是试图保持质量块在一个固定的位置，而不考虑质量块受到的干扰力.

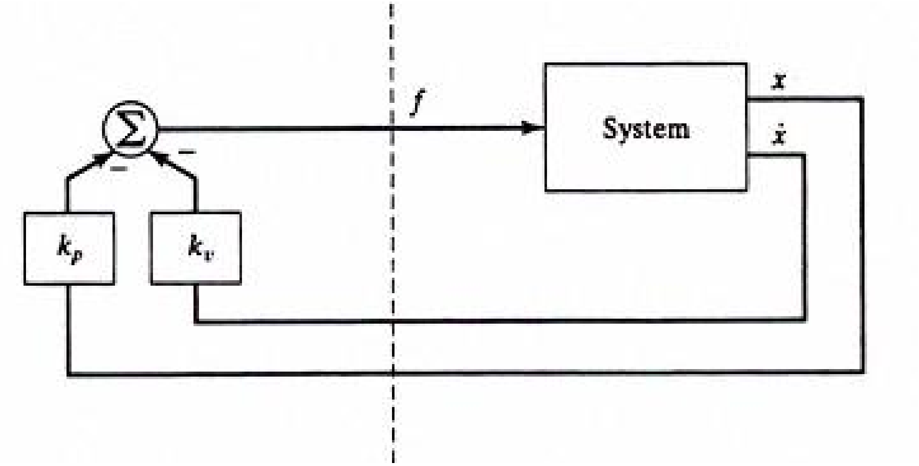
驱动器给质量块施加一个力f:

$$m\ddot{x}+b\dot{x}+kx=f$$

我们给出一个控制律，它是传感器反馈的函数:

$$f=-k_p x-k_v\dot{x}$$





二阶线性系统的控制

闭环系统的动力学方程如下:

$$m\ddot{x}+b\dot{x}+kx=-k_p x-k_v\dot{x}$$

$$m\ddot{x}+(b+k_v)\dot{x}+(k+k_p)x=m\ddot{x}+b'\dot{x}+k'x=0$$

通过设定控制增益 k' 和 b'，可以使闭环系统呈现任何期望的二阶系统特性。通过选择增益获得临界阻尼 $b'=2\sqrt{mk'}$ 和某种直接由 k' 给出的期望闭环刚度。

二阶线性系统的控制

例子：如果质量块-弹簧系统的各个参数分别为 $m=1, b=1, k=1$，找到增益 k_p, k_v，使得闭环刚度为16.0，且闭环系统处于临界阻尼状态。

解：如果希望 k' 等于 16.0，那么为了达到临界阻尼，则需要：

$$b' = 2\sqrt{mk'} = 8.0$$

因为

$$b=1, k=1$$

所以有

$$k_p = 15.0$$

$$k_v = 7.0$$

控制律的分解

为设计更加复杂的控制律，我们把控制器分解为基于模型的控制部分和伺服控制部分.

系统开环运动方程为:

$$m\ddot{x}+b\dot{x}+kx=f$$

控制部分为:

$$f=\alpha f'+\beta$$

这里 α,β 是常数或者函数，如果 f' 作为新的系统输入，那么可以选择 α,β 使得系统简化为单位质量。

控制律的分解

显然为了在 f' 输入时将系统简化为单位质量，这个系统中的 α,β 应该选择如下：

$$\alpha = m$$

$$\beta = b\dot{x} + kx$$

于是我们得到系统方程:

$$\ddot{x} = f'$$

伺服部分:

$$f' = -k_p x - k_v \dot{x}$$

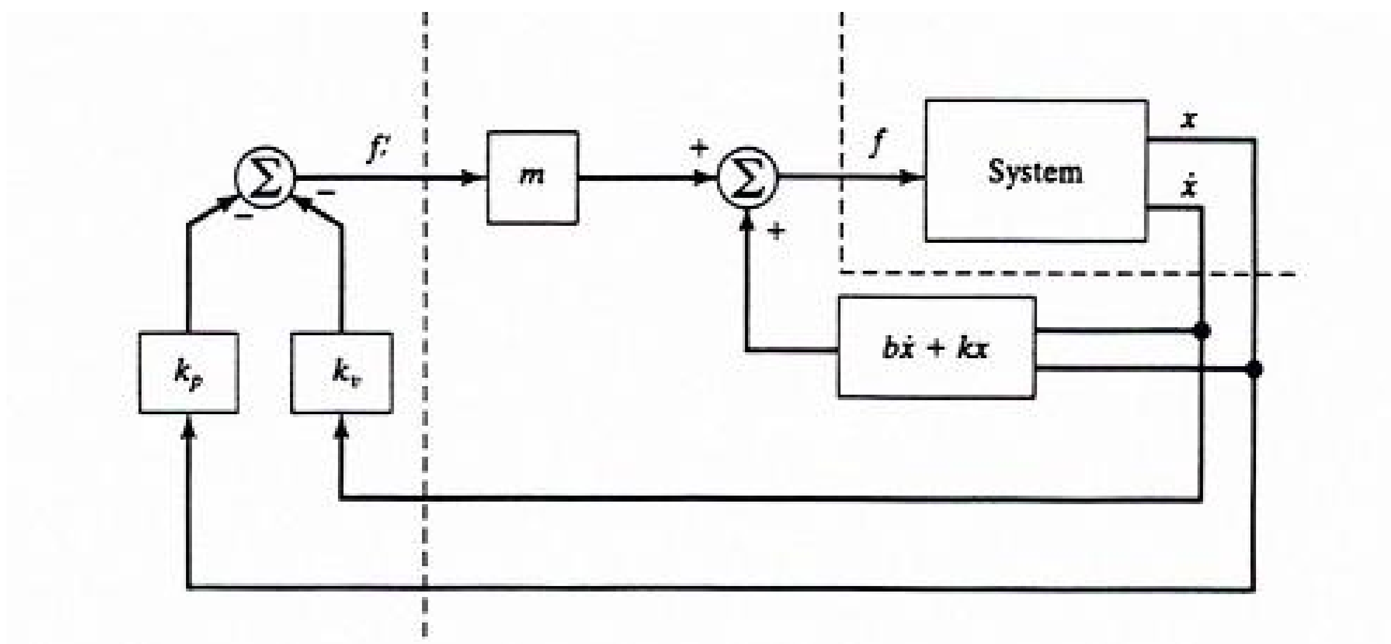
$$\ddot{x} + k_v \dot{x} + k_p x = 0$$

控制律的分解

在这种方法中，控制增益的设定非常简单而且与系统参数独立，即

$$k_v = 2\sqrt{k_p}$$

这时，系统处于临界阻尼状态。



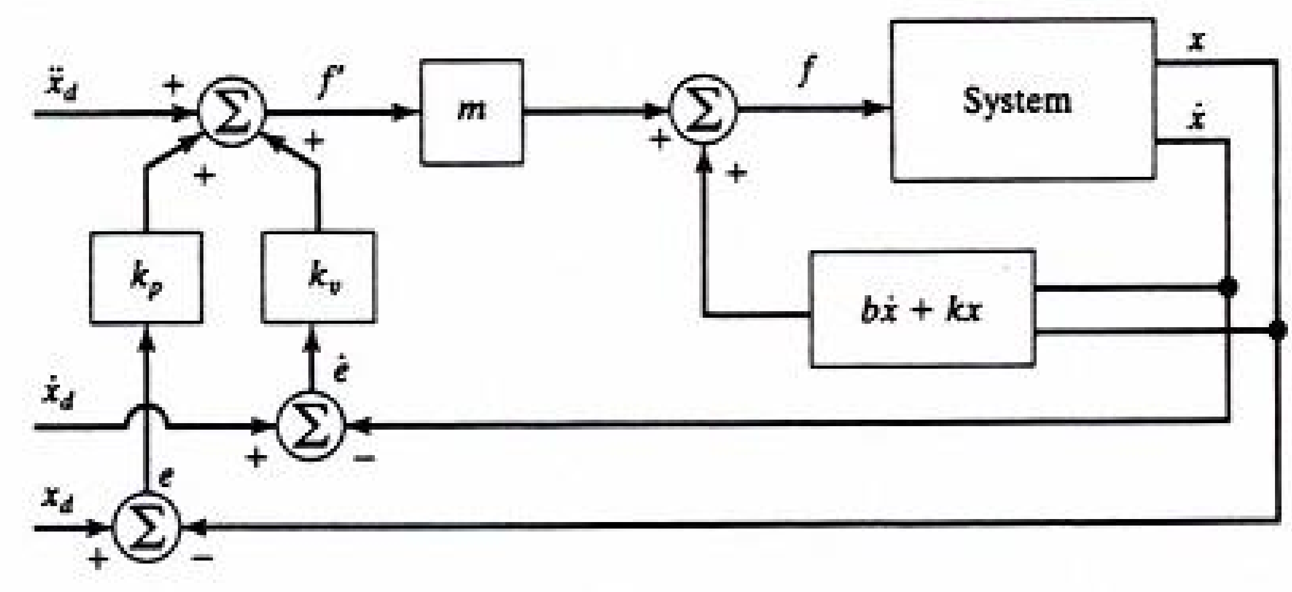
轨迹跟踪控制

轨迹可以在任一时间 给出一组 $x_d, \dot{x}_d, \ddot{x}_d$.

定义伺服误差为: $e = x_d - x$

由伺服控制律得出的轨迹如下:

$$f' = \ddot{x}_d + k_v \dot{e} + k_p e$$



轨迹跟踪控制

与单位质量运动式联立，得到:

$$\ddot{x} = \ddot{x}_d + k_v \dot{e} + k_p e \quad \Rightarrow \quad \ddot{e} + k_v \dot{e} + k_p e = 0$$

这种方程称为误差空间（error space）方程.

如果模型是正确的，且没有噪声和初始误差，质量块将准确跟踪期望的轨迹运动.

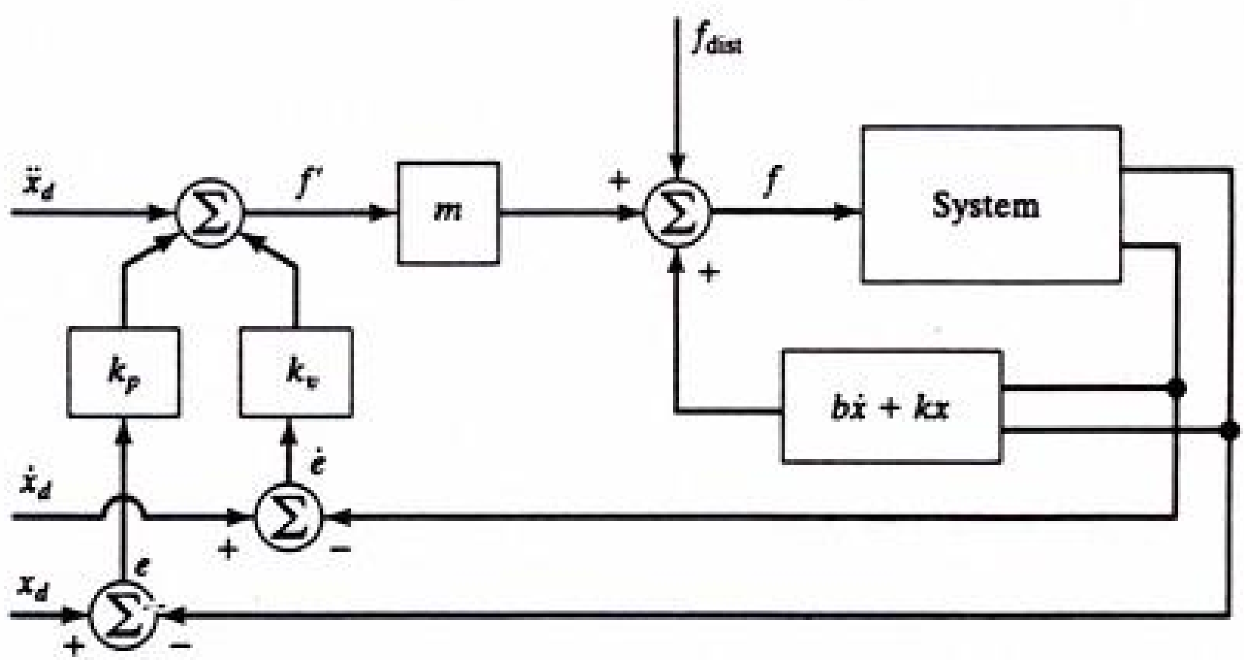
如果存在初始误差，这个误差将受到抑制，而后这个系统将准确跟踪期望轨迹.

干扰的抑制

控制系统的一个作用就是抗干扰能力，即存在外部干扰或者噪声的时候，仍能保持良好的性能。

具有附加干扰力输入的轨迹跟踪闭环系统的误差方程为：

$$\ddot{e}+k_v\dot{e}+k_p e=f_{dist}$$



干扰的抑制

1) BIBO stability有界输入-有界输出稳定:

如果干扰是有界的，即 $\max_t f_{dist}(t) < a$ ，那么，这个微分方程的解也是有界的。

这个结论说明：在一大类干扰下，我们至少能够保证系统是稳定的。

2) Steady-state error稳态误差

如果 f_{dist} 是常数. 通过对系统进行静态分析，即所有导数都为零 (steady-state analysis):

$$k_p e = f_{dist} \quad or \quad e = f_{dist} / k_p$$

明显看到，位置增益越大，稳态误差越小.

干扰的抑制

3) 附加积分项

为了消除稳态误差，有时采用一种修正的控制律(PID control law):

$$f' = \ddot{x}_d + k_v \dot{e} + k_p e + k_i \int e dt$$

误差方程变为:

$$\ddot{e} + k_v \dot{e} + k_p e + k_i \int e dt = f_{dist}$$

$$\dddot{e} + k_v \ddot{e} + k_p \dot{e} + k_i e = \dot{f}_{dist} \qquad (e = 0 \,, t < 0)$$

增加这一项可使系统在恒定干扰下不出现稳态误差:

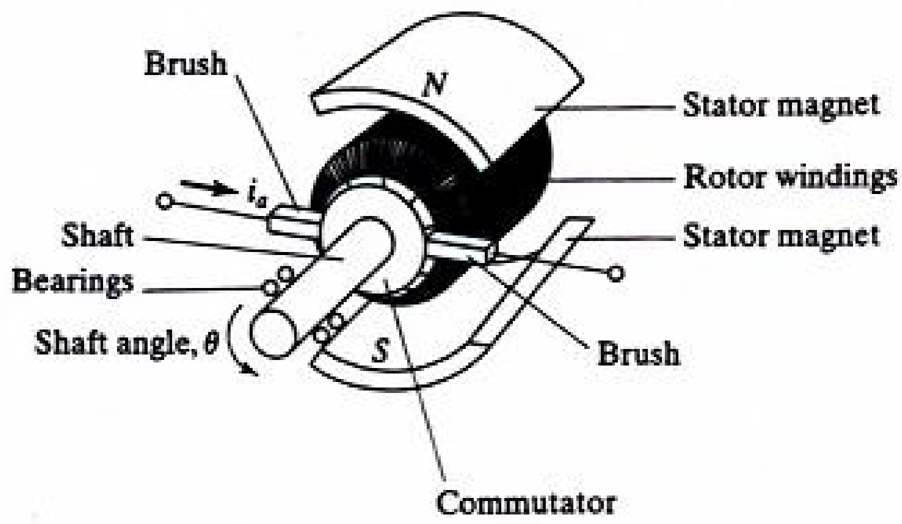
$$k_i e = 0 \quad \Rightarrow \quad e = 0$$

单关节的建模和控制

本节为单一旋转关节操作臂建立一个简单模型，通过几项假设把这个系统看作为二阶线性系统。

许多工业机器人常用的驱动方式是直流（DC）力矩电机。

- 定子Stator：机座、轴承、永久磁铁或电磁铁组成。
- 转子Rotor：电机轴和线圈绕组组成.



单关节的建模和控制

当电流通过线圈绕组时电机会产生转矩，表示为:

$$F = qV \times B$$

- 电机产生转矩的能力用电机转矩常数来表示，电枢电流与输出转矩的关系可表示为:

$$\tau_m = k_m i_a$$

- 当电机转动时，成为一个发电机，在电枢上产生一个电压。电机的另一个常数，反电动势常数，表示给定转速时产生的电压:

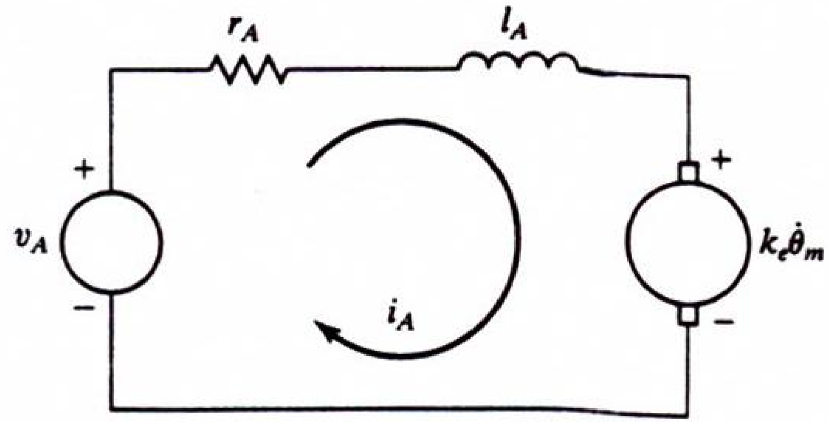
$$v = k_e \dot{\theta}_m$$

单关节的建模和控制

1. 电机电枢感抗

基尔霍夫定律:

$$l_a \dot{i}_a + r_a i_a = v_a - k_e \dot{\theta}_m$$



电流放大器式电机驱动器: 用电机驱动器控制电机转矩，驱动电路通过检测电枢电流不断调节电源电压使通过电枢的电流为期望电流.

当忽略电机感抗时，电机转矩可以直接通过控制电流来控制。

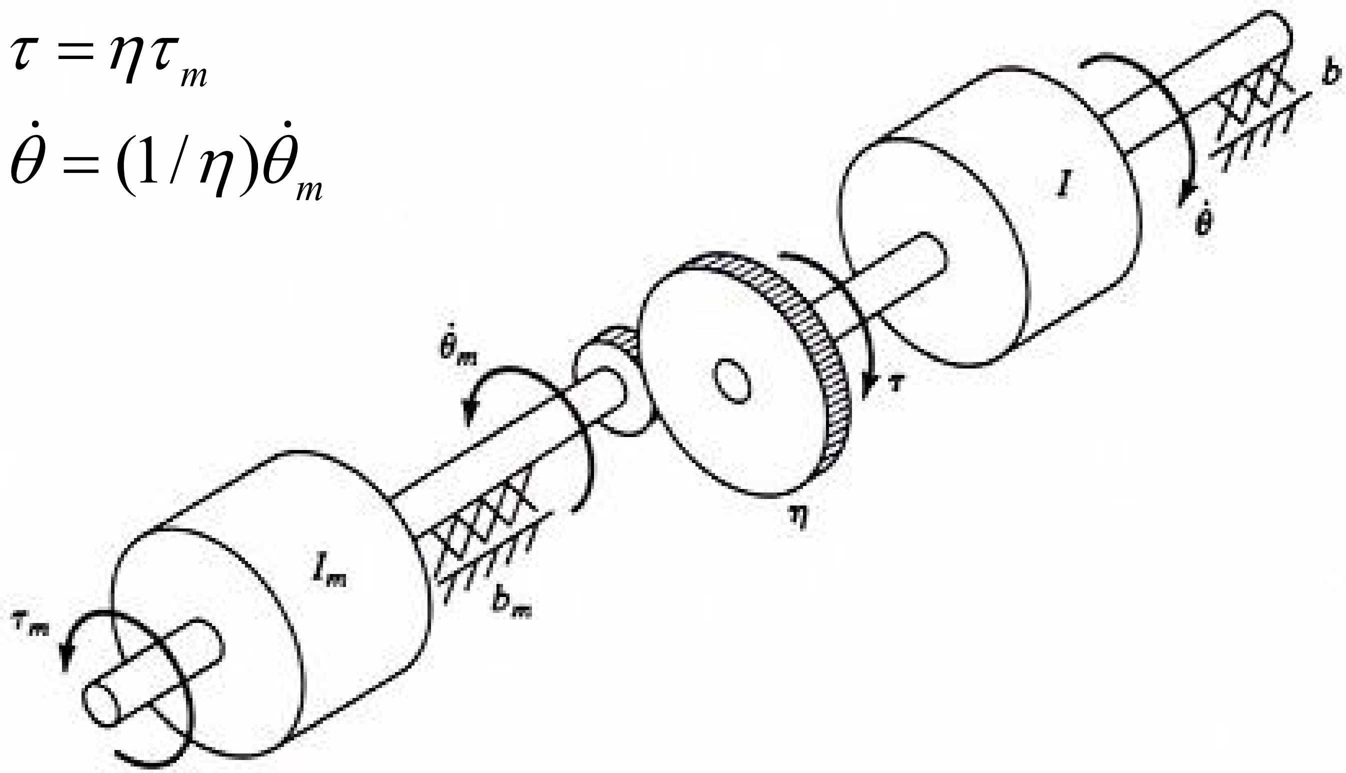
单关节的建模和控制

2. 有效惯量

传动比（ $\eta > 1$ ）可以提高驱动负载的力矩、降低负载的转速。

$$\tau = \eta \tau_m$$

$$\dot{\theta} = (1/\eta)\dot{\theta}_m$$



单关节的建模和控制

力矩平衡方程:

$$\tau_m = I_m\ddot{\theta}_m + b_m\dot{\theta}_m + (1/\eta)(I\ddot{\theta} + b\dot{\theta})$$

按照电机变量写:

$$\tau_m = (I_m + \frac{I}{\eta^2})\ddot{\theta}_m + (b_m + \frac{b}{\eta^2})\dot{\theta}_m$$

根据负载变量写:

$$\tau = (I + \eta^2 I_m)\ddot{\theta} + (b + \eta^2 b_m)\dot{\theta}$$

$I + \eta^2 I_m$ 被称作减速器输出端的有效惯量，$b + \eta^2 b_m$ 被称作有效阻尼。

单关节的建模和控制

例：如果连杆惯量在2和6Kg-m²之间变化，转子惯量 $I_m = 0.01$，传动比 $\eta = 30$，求有效惯量的最大值和最小值？

有效惯量的最小值是：

$$I_{\min} + \eta^2 I_m = 2.0 + (900)(0.01) = 11.0$$

最大值是：

$$I_{\max} + \eta^2 I_m = 6.0 + (900)(0.01) = 15.0$$

相对于总有效惯量的比例，通过减速器使得惯量的变化减小了。

单关节的建模和控制

3. 未建模柔性

前面建模过程是假设传动系统或者被驱动的连杆 不发生形变，实际上这些元件的刚度都是有限的，因此在系统建模时，必须注意不能激发这些共振模态。必须按照下式限定闭环系统的固有频率：

$$\omega_n \le \frac{1}{2}\omega_{res}$$

单关节的建模和控制

现则控制器增益的根据:

- 提高增益会加速系统响应、减小稳态误差.
- 非建模结构共振限制了系统增益。

典型工业机器人的结构共振范围为 5 Hz to 25 Hz. 最新的设计采用直接驱动方式可以避免由于减速器和传动系统产生的柔性，可使机器人的最低结构共振频率提高到 70 Hz.

单关节的建模和控制

例子：考虑一个质量弹簧系统，系统各个参数值为 $m=1, b=1, k=1$ 已知系统未建模的最低共振频率为8 radians/second. 找到 α, β, k_p, k_v 使系统闭环刚度尽量高，并且未建模模态不被激励.

解 ：我们选择

$$\alpha = 1$$

$$\beta = \dot{x} + x$$

选择闭环系统的固有频率为

$$\omega_n = 4 \ r/s$$

于是有

$$\begin{aligned} s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 &= 0 \\ \ddot{x} + k_v \dot{x} + k_p x &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} k_p &= \omega_n^2 = 16.0 \\ k_v &= 2\sqrt{k_p} = 8.0 \end{aligned}$$

单关节的建模和控制

4. 估计共振频率

如果已知柔性结构有效质量或者有效惯量的描述，那么就可以进行振动的近似分析。

例如，简单的质量-弹簧系统可以近似得出系统的固有频率：

$$\begin{cases} ms^2 + bs + k = 0 \\ s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi = \dfrac{b}{2\sqrt{km}} \\ \omega_n = \sqrt{k/m} \end{cases}$$

这里 k 是柔性结构件的刚度，m 为振动系统的等效质量。

单关节的建模和控制

例：假设一个没有质量的轴，它的刚度为 400 Nt-m/radian ，驱动一个惯量为 1 Kg-m2 的负载。如果在动力学模型中不计轴的刚度，那么这个未建模共振频率是多少？

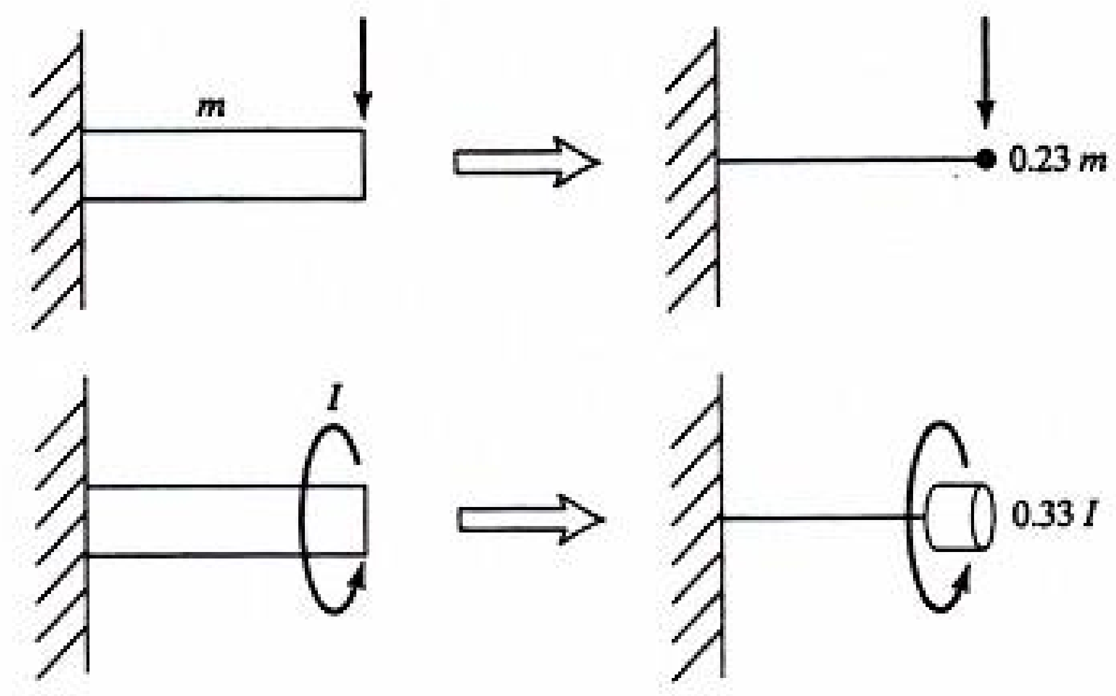
解：

$$\omega_{res} = \sqrt{400/1} = 20\ rad/s = 20/(2\pi)\ Hz \cong 3.2\ Hz$$

单关节的建模和控制

为了粗略估计梁和轴的最低共振频率，可以采用集中质量模型. 估计梁和轴的末端刚度公式是已知的，集中质量模型提供了估算共振频率所需的有效质量或者有效惯量。

用一个位于梁末端的质量为 0.23 m 的质点代替质量为m的梁，同样，由轴末端的集中惯量0.33 I 代替分布惯量I.



单关节的建模和控制

例： 一个质量为 4.347Kg 的连杆，末端横向刚度为3600 Nt/m. 假设驱动系统是完全刚性的，由于连杆柔性引起的共振将会限制控制增益，求

解：4.347 Kg 的质量在连杆上均匀分布，应用集中质量模型的估算方法，有效质量为：

$$\omega_{res}$$

因此，所估算的共振频率是：

$$(0.23)(4.347) \cong 1.0\ Kg$$

$$\omega_{res} = \sqrt{3600/1.0} = 60\ rad/s = 60/(2\pi)\ Hz \cong 9.6\ Hz$$

单关节的建模和控制

5. 单关节控制

三个假设:

- 电机感抗 l_a 可以忽略.
- 考虑大传动比的情况，将有效惯量视为一个常数 $I_{max}+\eta^2 I_m$
- 结构柔性可以忽略，最低结构共振频率 ω_{res} 用于设定伺服增益的情况除外.

应用这些假设，可以用下式给出分解运动对一个单关节操作臂进行控制:

$$\alpha = I_{max}+\eta^2 I_m \quad , \quad \beta = (b+\eta^2 b_m)\dot{\theta}$$

$$\tau' = \ddot{\theta}_d + k_v\dot{e} + k_p e$$

单关节的建模和控制

系统的闭环动力学方程为:

$$\ddot{e} + k_v \dot{e} + k_p e = \tau_{dist}$$

式中的增益取:

$$k_p = \omega_n^2 = \frac{1}{4}\omega_{res}^2$$

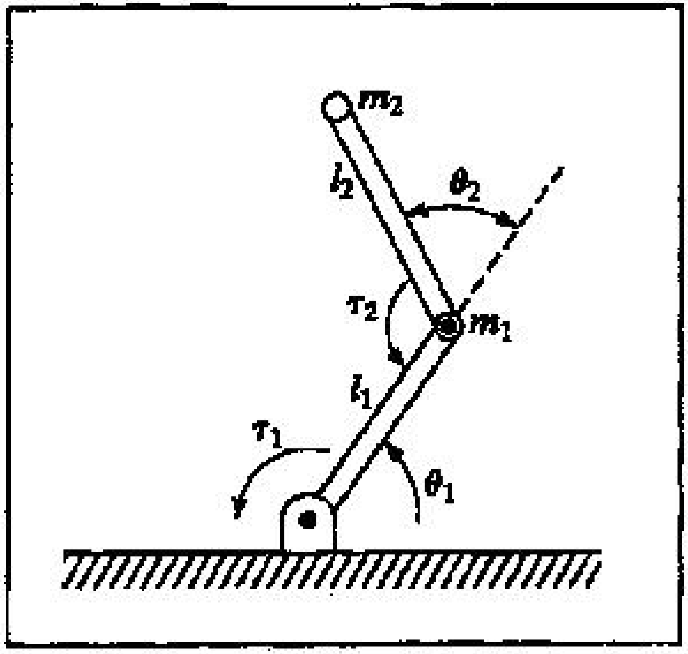
$$k_v = 2\sqrt{k_p} = \omega_{res}$$

练习1

$$\tau_1 = m_2 l_2^2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + m_2 l_1 l_2 c_2 (2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + (m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\theta}_1$$
$$- m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_2^2 - 2 m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + m_2 l_2 g c_{12} + (m_1 + m_2) l_1 g c_1$$
$$\tau_2 = m_2 l_1 l_2 c_2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 l_2 g c_{12} + m_2 l_2^2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)$$

计算这个机器人在位形变化时，关节1的等效惯量的变化（以最大值的百分比表示）采用以下数值:

$$l_1 = l_2 = 0.5m$$
$$m_1 = 4.0Kg$$
$$m_2 = 2.0Kg$$



练习2

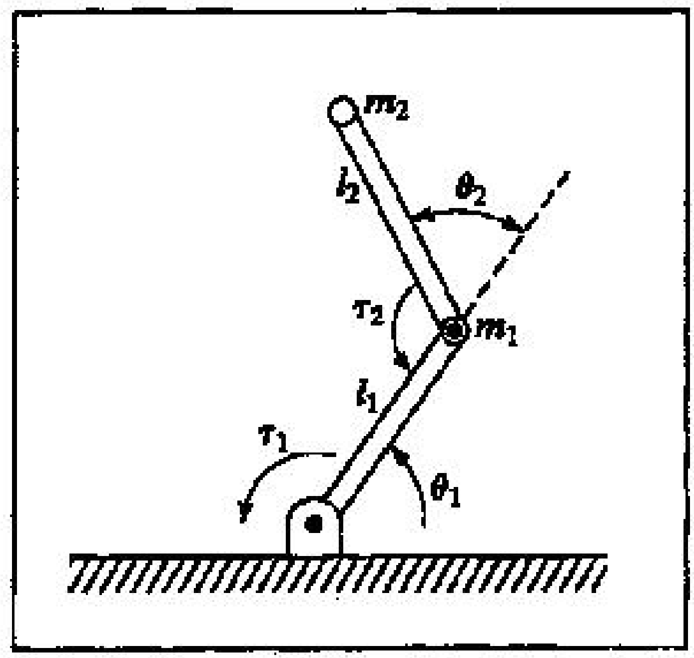
$$\tau_1 = m_2 l_2^2(\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2) + m_2 l_1 l_2 c_2(2\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2) + (m_1+m_2) l_1^2 \ddot{\theta}_1$$
$$- m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_2^2 - 2 m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + m_2 l_2 g c_{12} + (m_1+m_2) l_1 g c_1$$
$$\tau_2 = m_2 l_1 l_2 c_2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 l_2 g c_{12} + m_2 l_2^2(\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2)$$

重新计算，其中机器人带有减速器，减速比 η

转子惯量为 I_m

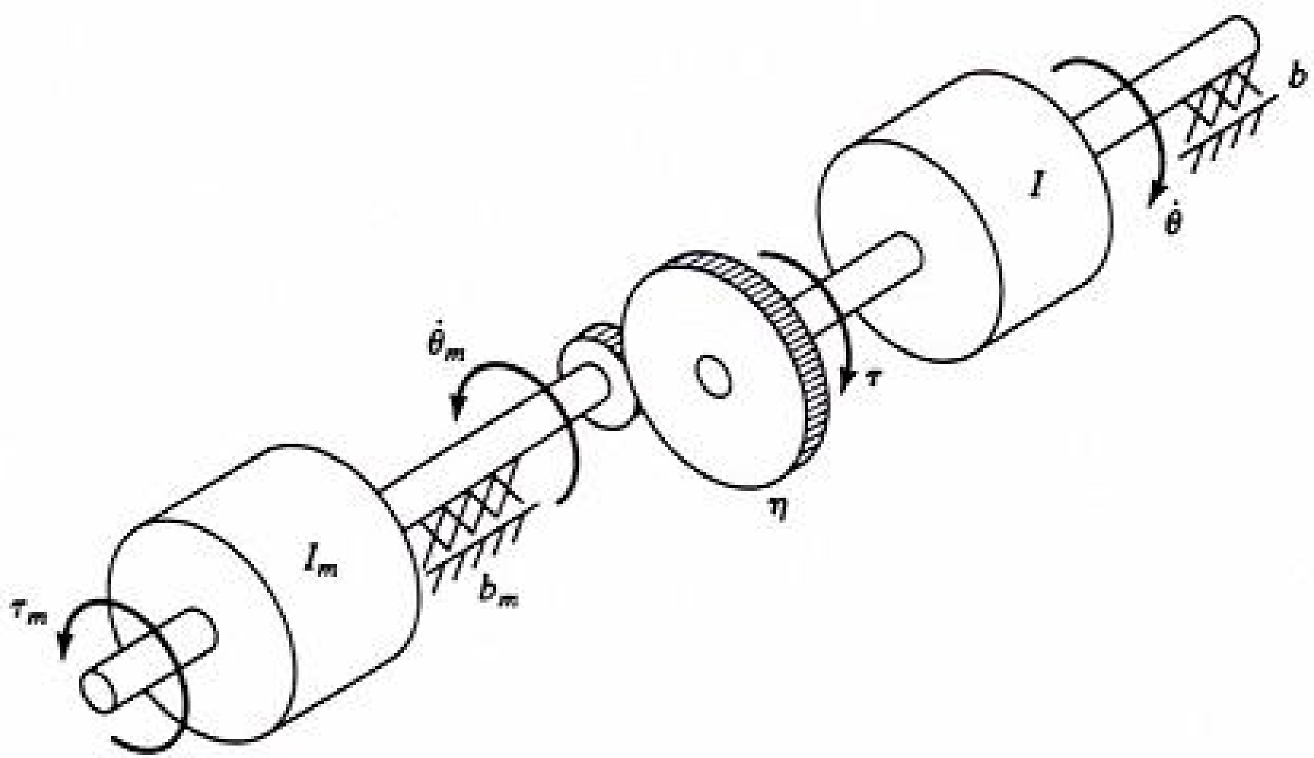
$$\eta = 20$$

$$I_m = 0.01Kg \bullet m^2$$



练习3

系统负载在4 和 5 Kg-m²之间， 转子惯量 I 是 $I_m = 0.01\,Kg - m^2$，传动比 $\eta = 10$． 系统的未建模共振频率为 8，12，and 20 r/s． 设分解运动控制器的 k_p, k_v 求 α, β ，要求系统不出现欠阻尼并且不存在共振，刚度尽可能大.



谢 谢！